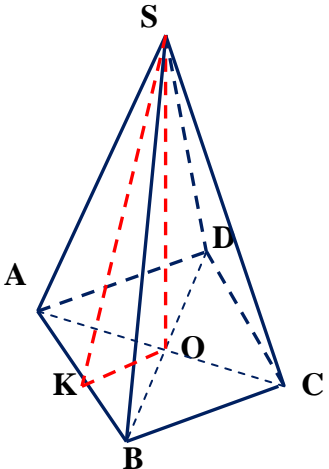
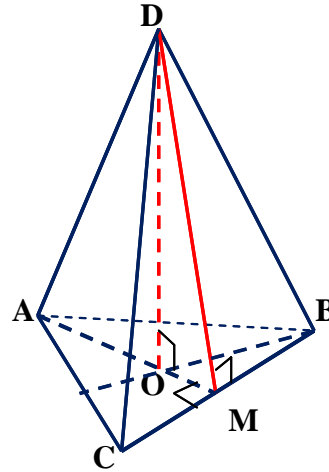
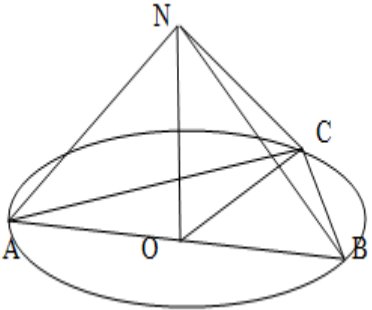


№ п/п	Рисунок	Вопросы и задачи	Вид деятельности
1.		<p><b>Вспомним основные элементы пирамиды.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Какой многогранник изображен на рисунке?</li> <li>2. Назовите вершину пирамиды.</li> <li>3. Назовите основание пирамиды.</li> <li>4. Назовите высоту пирамиды.</li> <li>5. Назовите высоту боковой грани пирамиды.</li> <li>6. Назовите угол между боковым ребром пирамиды и основанием.</li> <li>7. Назовите угол между боковой гранью и основанием.</li> <li>8. Назовите угол между боковыми гранями пирамиды.</li> </ol>	<p>Посмотрите справочные материалы и ответьте на вопросы.</p>
<b>Пирамида с треугольным основанием (тетраэдр)</b>			
2.		<p>Основание тетраэдра DABC треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Расстояние от точки D до сторон треугольника основания равны 5 см. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC.</p>	<p>Выполните рисунок и запишите решение задачи в тетрадь</p> <p><b>Решение</b></p> <p>Расстояние от вершины до плоскости основания равно высоте, которая опущена из вершины на основание.</p> <p>Величины апофемы пирамиды равны по условию задачи. Таким образом, прямоугольные треугольники, образованные высотой пирамиды, апофемой и отрезком, соединяющим высоту и точку касания апофемы и основания - равны. Откуда - высота, опущенная из вершины - является центром вписанной в основание окружности.</p> <p>Найдем радиус вписанной в основание окружности. Формула радиуса окружности, вписанной в произвольный треугольник:</p> $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ <p><math>p = (13 + 14 + 15) / 2 = 21</math>; <math>r = 4</math></p>

			<p>Таким образом, расстояние от точки D до плоскости основания равно длине высоты, опущенной из вершины на основание. По теореме Пифагора:</p> $5^2 = h^2 + 4^2 ; h^2 = 25 - 16; h^2 = 9 ; h = 3$ <p><b>Ответ: 3 см.</b></p>
3.		<p>Основание тетраэдра DABC треугольник со сторонами 17 см, 17 см, 16 см. Расстояние от точки D до сторон треугольника основания равны 10 см. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC.</p>	<p><b>Решите задачу самостоятельно.</b> Выполните рисунок и решение задачи в тетради.</p>
<b>Пирамида с прямоугольным треугольником в основании</b>			
4.		<p>В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого 6 см, а радиус описанной около него окружности равен 5 см. Основанием высоты этой пирамиды является середина гипотенузы. Высота пирамиды равна 12 см. Вычислить боковые ребра пирамиды</p>	<p>В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на его гипотенузе. Соответственно, <math>AB = 10</math> см, <math>AO = 5</math> см. Поскольку высота <math>ON = 12</math> см, то величина ребер <math>AN</math> и <math>NB</math> равна <math>AN^2 = AO^2 + ON^2; AN^2 = 5^2 + 12^2; AN = \sqrt{169}; AN = 13</math> Поскольку нам известна величина <math>AO = OB = 5</math> см и величина одного из катетов основания (8 см), то высота, опущенная на гипотенузу, будет равна <math>CB^2 = CO^2 + OB^2; 64 = CO^2 + 25; CO^2 = 39; CO = \sqrt{39}</math> Соответственно, величина ребра <math>CN</math> будет равна <math>CN^2 = CO^2 + NO^2; CN^2 = 39 + 144; CN = \sqrt{183}</math></p> <p><b>Ответ: 13, 13, <math>\sqrt{183}</math></b></p>
5.		<p>В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого 16 см, а радиус описанной около него окружности равен 10 см. Основанием высоты этой пирамиды является середина гипотенузы. Высота пирамиды равна 14 см. Вычислить боковые ребра пирамиды</p>	<p><b>Решите задачу самостоятельно.</b> Выполните рисунок и решение задачи в тетради.</p>

### Пирамида с четырёхугольным основанием

6.		<p>Длина стороны ромба ABCD равна 5 см, длина его диагонали BD равна 6 см. Через точку O, которая является точкой пересечения диагоналей ромба, проведена прямая OK, перпендикулярная его плоскости. Найти расстояние от точки K до вершин ромба (KA, KB, KC, KD) если OK = 8 см.</p>	<p>В результате построения геометрической фигуры по условию задачи, заметим, что у нас получилась пирамида, в основании которой лежит ромб. Нам необходимо найти величину ребер пирамиды, которые прилегают к ее вершине.</p> <p>Поскольку диагонали ромба делятся в точке пересечения пополам, то BO равно половине диагонали BD.</p> $BO = BD / 2 = 6 / 2 = 3 \text{ см}$ <p>Поскольку OK по условию задачи является перпендикуляром к плоскости основания пирамиды, то треугольник BOK является прямоугольным. Отсюда, по теореме Пифагора находим величину ребра BK.</p> $BK^2 = BO^2 + OK^2$ $BK^2 = 3^2 + 8^2$ $BK^2 = 73$ $BK = \sqrt{73}, \text{ то есть корень квадратный из } 73$ <p>Поскольку треугольники BKO и DKO равны по двум сторонам и углу (KO - общая сторона треугольников, BO=OD как половины диагонали ромба, а прямой угол образован перпендикуляром по условию задачи), то ребро BK = KD.</p> <p>Вычислим длину ребра AK. Поскольку диагонали ромба пересекаются под прямым углом, то зная величину половины одной диагонали и стороны ромба, несложно определить величину половины другой диагонали, то есть:</p> $AB^2 = BO^2 + AO^2$ $5^2 = 3^2 + AO^2$ $AO^2 = 5^2 - 3^2$
----	--	---	--

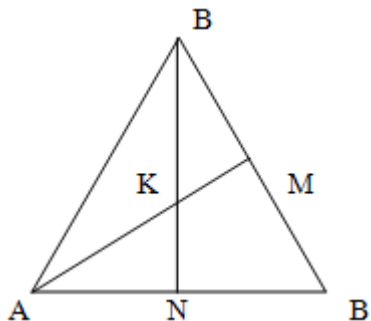
			$AO^2 = 16$ $AO = 4$  Аналогичным способом теперь найдем длину ребра АК $AK^2 = AO^2 + OK^2$ $BK^2 = 4^2 + 8^2$ $BK^2 = 80$ $BK = 4 \sqrt{5}$ , четыре квадратных корня из пяти  Поскольку треугольники АОК и СОК также равны по двум сторонам и углу, то $AO = CO$ .  <b>Ответ:</b> АО и СО равны четыре квадратных корня из пяти, а ВО и ДО равны корню квадратному из 73
--	--	--	--

### Задача 3.

*Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра.*

### Решение.

Поскольку медианы скрещиваются, они лежат в одной плоскости. Поскольку они проведены к боковым граням правильного тетраэдра, то эта плоскость лежит на боковой грани. Поскольку тетраэдр является правильным, то каждая из его граней представляет собой правильный треугольник.



Все углы равностороннего треугольника равны 60 градусам.

Поскольку в равностороннем треугольнике каждая медиана является одновременно и биссектрисой и высотой, то:

$\angle MAB = 30$  градусов

$\angle ANK = 90$  градусов

Откуда  $\angle AKN = 180 - 90 - 30 = 60$  градусов.

**Ответ:** Медианы пересекаются под углом 60 градусов

### Задача

*Основание пирамиды прямоугольный треугольник, катеты которого равны 8 и 6 см. высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объем пирамиды.*

**Решение.**

Объем пирамиды найдем по формуле:

$$V = 1/3 Sh$$

Площадь основания найдем по формуле нахождения площади прямоугольного треугольника:

$$S = ab/2 = 8 * 6 / 2 = 24$$

откуда

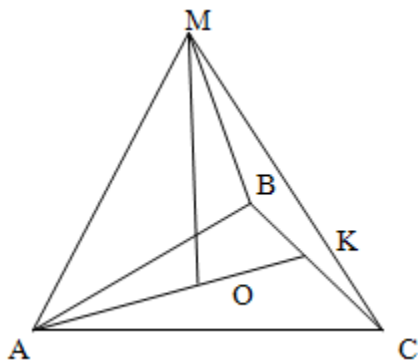
$$V = 1/3 * 24 * 10 = 80 \text{ см}^3 .$$

**адача.**

В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной  $b$  и углом при основании  $\beta$ . все боковые грани образуют с основанием угол  $\varphi$ .

**Решение.**

Поскольку в основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, то для [нахождения площади равнобедренного треугольника](#), воспользуемся приведенными в соответствующем уроке формулами.



При желании можно разбить треугольник ABC на два прямоугольных треугольника АКВ и АКС. Но в результате формулы будут все равно тождественны. Действительно,

$$AK = AB \sin \beta = b \sin \beta$$

$$BK = AB \cos \beta = b \cos \beta$$

$$S_{ABK} = AK * BK / 2 = b^2 \sin \beta \cos \beta / 2$$

откуда

$$S_{ABC} = 2S_{ABK} = b^2 \sin \beta \cos \beta$$

(примем за искомую площадь основания, далее справочно приведем к той же формуле, которая указана по ссылке выше)

Если воспользоваться [основными тригонометрическими тождествами](#), то

$$b^2 \sin \beta \cos \beta = 1/2 b^2 \sin 2\beta = 1/2 b^2 \sin 2\beta$$

или как по основной формуле (площади равнобедренного треугольника)

$$1/2 b^2 \sin 2\beta = 1/2 b^2 \sin (180 - \alpha) = 1/2 b^2 \sin \alpha$$

Теперь **найдем площадь боковой поверхности пирамиды.**

Сначала найдем высоту боковых граней, прилежащих к равным сторонам [равнобедренного треугольника](#), лежащего в основании пирамиды. При этом учтем, что высота пирамиды проецируется в точку О основания, которая одновременно является центром вписанной окружности. Вместе с радиусом вписанной окружности, высота боковой грани образует прямоугольный треугольник. Откуда высота боковой грани пирамиды равна:

$$h = r / \sin \varphi$$

Длину [радиуса вписанной окружности](#) найдем как

$$r = S/p$$

Учитывая, что  $BC = 2BK$ , то  $BC = 2b \cos \beta$

откуда

$$p = (b + b + 2b \cos \beta) / 2$$

$$p = (2b + 2b \cos \beta) / 2$$

$$p = 2b (1 + \cos \beta) / 2$$

$$p = b (1 + \cos \beta)$$

Таким образом, радиус вписанной окружности в основание пирамиды будет равен

$$r = S / p$$

$$r = b^2 \sin \beta \cos \beta / b (1 + \cos \beta) = b \sin \beta \cos \beta / (1 + \cos \beta)$$

Теперь определим высоту боковых граней пирамиды. Зная, что

$$l / r = \cos \varphi, \text{ то}$$

$$l = r \cos \varphi$$

Тогда площадь грани пирамиды, прилегающей к равным сторонам основания (а в основании пирамиды у нас лежит равнобедренный треугольник) будет равна:

$$S_1 = lb / 2$$

$$S_1 = r \cos \varphi * b / 2$$

$$S_1 = b \sin \beta \cos \beta / (1 + \cos \beta) \cos \varphi * b / 2$$

$$S_1 = b^2 \sin \beta \cos \beta / (1 + \cos \beta) \cos \varphi / 2$$

$$S_1 = b^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi / (2 (1 + \cos \beta))$$

Площадь боковой грани, прилегающей к основанию, равна:

$$S_2 = BC * l / 2$$

$$S_2 = 2b \cos \beta * r \cos \varphi / 2$$

$$S_2 = b \cos \beta * r \cos \varphi$$

$$S_2 = b \cos \beta * b \sin \beta \cos \beta / (1 + \cos \beta) * \cos \varphi$$

$$S_2 = b^2 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \varphi / (1 + \cos \beta)$$

Площадь боковой поверхности пирамиды равна:

$$S_{бок} = 2S_1 + S_2$$

$$S_{бок} = 2 * b^2 \sin \beta \cos \beta / (2 (1 + \cos \beta) \cos \varphi) + b^2 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \varphi / (1 + \cos \beta)$$

$$S_{бок} = b^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi / (1 + \cos \beta) + b^2 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \varphi / (1 + \cos \beta)$$

$$S_{бок} = (b^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi + b^2 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \varphi) / (1 + \cos \beta)$$

$$S_{бок} = b^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi (1 + \cos \beta) / (1 + \cos \beta)$$

$$S_{бок} = b^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi$$

Откуда площадь полной поверхности пирамиды с равнобедренным треугольником в основании составит:

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$S = b^2 \sin \beta \cos \beta \cos \varphi + b^2 \cos^2 \beta \sin \beta \cos \varphi / ( 1 + \cos \beta )$$

### ***Пирамида с четырёхугольным основанием***

**Решение.**

### **Задача**

Высота четырехугольной пирамиды равна 4см. а её апофема создаёт с высотой угол 45 градусов.Найдите боковую поверхность пирамиды.

**Решение.**

Исходя из того, что по условию задачи любая апофема создаёт с высотой угол 45 градусов, то пирамида является правильной. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды -  $S = 1/2 Pa$ , где P - периметр основания, а - апофема боковой грани. Апофема образует с высотой пирамиды и отрезком, проведенным из точки пересечения высоты и основания на сторону основания прямоугольный треугольник. Это следует из определения высоты пирамиды - она образует с плоскостью основания прямой угол.

Данный треугольник является равнобедренным, поскольку сумма углов треугольника равна 180 градусам, один из углов прямой, тогда  $180 - 90 - 45 = 45$ . Поскольку оба угла равны - треугольник равнобедренный.

Таким образом, длина стороны основания равна удвоенной высоте пирамиды (треугольник равнобедренный, поэтому второй катет равен высоте пирамиды, а он же равен половине стороны, поскольку пирамида является правильной).

Исходя из того, что оба катета треугольника, образованного высотой пирамиды и отрезком, проведенным к боковой грани равны, то по теореме Пифагора апофема пирамиды равна

$$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4 \sqrt{2} , \text{ четыре корня из двух}$$

Периметр равен  $4 * 2 * 4 = 32$  см, таким образом

$$S = 1/2 Pa = 1 / 2 * 32 * 4 \sqrt{2} = 64 \sqrt{2} , \text{ 64 корня из двух}$$



**Ответ:** 64 корня из двух

### Задача

Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 24 см, а боковое ребро равно 26 см. Найти: а) площади диагонального сечения пирамиды б) сторону основания пирамиды в) площадь боковой поверхности пирамиды.

#### Решение.

Поскольку пирамида правильная, то диагональ основания вместе с соответствующими двумя ребрами пирамиды образуют равнобедренный треугольник, площадь которого будет равна площади диагонального сечения пирамиды. Его площадь можно найти по формуле Герона:

$$S = 1/4 \sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}$$
$$S = 1/4 \sqrt{(26 + 26 + 24)(26 + 24 - 26)(26 + 24 - 26)(26 + 26 - 24)}$$
$$S = 1/4 \sqrt{76 * 24 * 24 * 28} = 1/4 \sqrt{1225728} \approx 276,78 \text{ см}^2.$$

Поскольку пирамида правильная, то ее диагональ образует с двумя сторонами основания равнобедренный прямоугольный треугольник. Если обозначить сторону основания как  $a$ , то по теореме Пифагора

$$a^2 + a^2 = 24^2$$
$$2a^2 = 576$$
$$a^2 = 288$$
$$a = \sqrt{288} \approx 16.97 \text{ см}$$

Площадь боковой поверхности пирамиды будет равна сумме площадей поверхностей боковых граней, каждая из которых по формуле Герона имеет площадь

$$S = 1/4 \sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}$$
$$S = 1/4 \sqrt{(26 + 26 + \sqrt{288})(26 + \sqrt{288} - 26)(26 + \sqrt{288} - 26)(26 + 26 - \sqrt{288})}$$
$$S = 1/4 \sqrt{695808} \approx 208.54 \text{ см}^2.$$

То есть площадь боковой поверхности будет равна  $4S = \sqrt{695808} \approx 208.54 \text{ см}^2$ .

**Ответ:**  $1/4 \sqrt{1225728} \text{ см}^2$ ,  $\sqrt{288} \text{ см}$ ,  $\sqrt{695808} \text{ см}^2$ .